

2024학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가
고난도 문항 해설 및 유사유형문제

1) 2024학년도 9월 모평 22번 - [곱의 미분법과 부정적분]

22. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하고 $g(x)$ 의 한 부정적분을 $G(x)$ 라 할 때,
이 함수들은 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \int_1^x f(t) dt = xf(x) - 2x^2 - 1$$

$$(나) f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$$

$\int_1^3 g(x) dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

[문항해설]

> 곱의 미분법과 부정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구하고, 그 정적분을 구할 수 있는지 묻는 문제다. (나) 조건을 보고 바로 곱의 미분법을 떠올릴 수 없었다면 관련 정의를 꼼꼼하게 정리해 놓도록 한다. 적분구간에 미지수가 포함된 함수도 시험에 자주 등장하는 유형이므로 관련 개념을 확실하게 이해하고 동일 유형의 다양한 문제들을 평소 훈련하도록 한다.

[유사유형 풀어보기] _ 01

함수 $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & (x < 1) \\ 2(x-3) & (x \geq 1) \end{cases}$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = \int_0^x (t-1)f(x)dt$ 라 할 때, 실수 t 에 대하여 직선 $y=t$ 와 곡선 $y=g(x)$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$ 라 하자. $\left| \lim_{k \rightarrow a+} h(t) - \lim_{t \rightarrow a-} h(t) \right| = 2$ 를 만족시키는 모든 실수 a 에 대하여 $|a|$ 의 값의 합을 S 라 할 때, $30S$ 의 값을 구하시오.

§ 출전 : 고3 2020년 10월 교육청 수학 B형 33번

[유사유형 풀어보기] _ 02

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$ 가 있다. 양의 상수 a 에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $x|g(x)| = \int_{2a}^x (a-t)f(t)dt$ 이다.

(나) 방정식 $g(f(x)) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$\int_{-2a}^{2a} f(x)dx$ 의 값을 구하시오.

§ 출전 : 고3 2022년 3월 교육청 수학 22번

[유사유형 풀어보기] _ 03

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x) = \begin{cases} f(x+2) & (x < 0) \\ \int_0^x tf(t)dt & (x \geq 0) \end{cases}$ 이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 실수 a 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 $h(x) = |g(x) - g(a)|$ 라 할 때, 함수 $h(x)$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a 의 값의 곱은?

- ① $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{7\sqrt{3}}{6}$ ③ $-\sqrt{3}$ ④ $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

§ 출전 : 고3 2022년 7월 교육청 수학 15번

1) [정답] 80

[출제의도] 함수의 연속성과 적분의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$$g(x) = \int_0^x (t-1)f(t) dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면 } g'(x) = (x-1)f(x) = \begin{cases} -3x^3+3x^2 & (x < 1) \\ 2x^2-8x+6 & (x \geq 1) \end{cases}$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 적분하면

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^4 + x^3 + C_1 & (x < 1) \\ \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x + C_2 & (x \geq 1) \end{cases}$$

(C_1, C_2 는 적분상수)

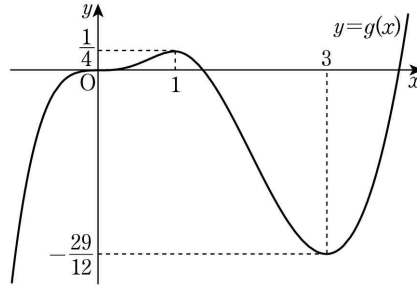
$g'(1)=0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$g(0)=0 \text{에서 } C_1=0 \text{이고 } -\frac{3}{4}+1=\frac{2}{3}-4+6+C_2$$

$$\text{에서 } C_2 = -\frac{29}{12}$$

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^4 + x^3 & (x < 1) \\ \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x - \frac{29}{12} & (x \geq 1) \end{cases}$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



위의 그래프를 이용하여 함수 $h(t)$ 를 구하면

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \left(t < -\frac{29}{12} \text{ 또는 } t > \frac{1}{4} \right) \\ 2 & \left(t = -\frac{29}{12} \text{ 또는 } t = \frac{1}{4} \right) \\ 3 & \left(-\frac{29}{12} < t < \frac{1}{4} \right) \end{cases}$$

이므로 $\left| \lim_{t \rightarrow a^+} h(t) - \lim_{t \rightarrow a^-} h(t) \right| = 2$ 를 만족시키는 실수 a 의 값은 $\frac{1}{4}$ 과 $-\frac{29}{12}$ 뿐이다.

$$\text{그러므로 } S = \left| \frac{1}{4} \right| + \left| -\frac{29}{12} \right| = \frac{8}{3}$$

$$\text{따라서 } 30S = 30 \times \frac{8}{3} = 80$$

[참고] $g(x) = \int_0^x (t-1)f(t) dt$ 는 다음과 같이 구할 수도 있다.

(i) $x < 1$ 일 때,

$$g(x) = \int_0^x (t-1)(-3t^2) dt = -\frac{3}{4}x^4 + x^3$$

(ii) $x \geq 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^1 (t-1)(-3t^2) dt + \int_1^x 2(t-1)(t-3) dt \\ &= \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x - \frac{29}{12} \end{aligned}$$

2) [정답] 4

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.

삼차함수 $g(x)$ 의 상수항이 0이므로 $g(x)$ 는 x 를 인수로 갖는다. ㉠

조건 (가)의 예 $x = 2a$ 를 대입하면 $2a|g(2a)| = 0$

a 가 양수이므로 $g(2a) = 0$ 이고 $g(x)$ 는 $(x - 2a)$ 를 인수로 갖는다. ㉡

㉠, ㉡에서 $g(x) = x(x - 2a)(x - b)$ (단, b 는 실수)

함수 $(a - x)f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $\int_{2a}^x (a - t)f(t) dt$ 는 실수 전체의 집합에서 미분

가능하고, $\frac{d}{dx} \int_{2a}^x (a - t)f(t) dt = (a - x)f(x)$ 이다.

즉, 함수 $x|g(x)|$ 는 $x = 2a$ 에서 미분가능하다.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2a+} \frac{x|g(x)| - 2a|g(2a)|}{x - 2a} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2a+} \frac{x|x(x - 2a)(x - b)|}{x - 2a} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2a+} x^2|x - b| \\ &= 4a^2|2a - b| \\ & \lim_{x \rightarrow 2a-} \frac{x|g(x)| - 2a|g(2a)|}{x - 2a} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2a-} \frac{x|x(x - 2a)(x - b)|}{x - 2a} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2a-} (-x^2|x - b|) \\ &= -4a^2|2a - b| \end{aligned}$$

이므로 $4a^2|2a - b| = -4a^2|2a - b|$ 에서 $b = 2a$ 이다.

따라서 $g(x) = x(x - 2a)^2$

$$\int_{2a}^x (a - t)f(t) dt = \begin{cases} -x^2(x - a)^2 & (x < 0) \\ x^2(x - a)^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

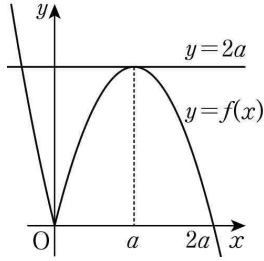
이고 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$(a - x)f(x) = \begin{cases} -4x(x - a)(x - 2a) & (x < 0) \\ 4x(x - a)(x - 2a) & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 4x(x - 2a) & (x < 0) \\ -4x(x - 2a) & (x \geq 0) \end{cases}$$

방정식 $g(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = 0$ 또는 $f(x) = 2a$

방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근 0, $2a$ 를 가지므로 조건 (나)에 의해 방정식 $f(x) = 2a$ 는 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=2a$ 의 교점의 개수가 2이어야 하므로
 $f(a)=-4a(a-2a)$

$$=4a^2=2a$$

$$a=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\int_{-2a}^{2a} f(x) dx &= \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 (4x^2 - 4x) dx + \int_0^1 (-4x^2 + 4x) dx \\ &= \left[\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^1 \\ &= 4\end{aligned}$$

3) [정답] ①

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 활용하여 문제 해결하기

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로 $x=0$ 에서 연속이다.

$$g(0)=0\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)=f(2)=0$$

$f(x)=(x-2)(x-p)$ (p 는 상수)라 하면

$$f(x+2)=x(x+2-p)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(h)-F(0)}{h}$$

$$=F'(0)=0$$

$$g'(0)=2-p=0, \quad p=2$$

$$f(x)=(x-2)^2$$

그러므로

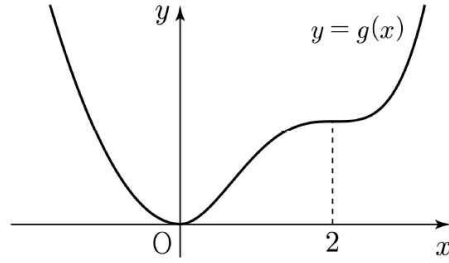
$$g(x) \begin{cases} x^2 & (x < 0) \\ \int_0^x t(t-2)^2 dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$g'(x) \begin{cases} 2x & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ x(x-2)^2 & (x > 0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(i) $g(a)=0$ 인 경우

$h(x)=g(x)$ 이므로 함수 $h(x)$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수는 0

(ii) $0 < g(a) < g(2)$ 또는 $g(2) < g(a)$ 인 경우

방정식 $h(x)=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^-} \frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha} \neq \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}$$

$$\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta} \neq \lim_{x \rightarrow \beta^+} \frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}$$

함수 $h(x)$ 는 $x=\alpha, x=\beta$ 에서 미분가능하지 않다.

함수 $h(x)$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수는 2

(iii) $g(a)=g(2)$ 인 경우

방정식 $h(x)=0$ 의 두 근을

$\gamma(\gamma < 0)$, 2라 하면

$$\lim_{x \rightarrow \gamma^-} \frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma} \neq \lim_{x \rightarrow \gamma^+} \frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}$$

함수 $h(x)$ 는 $x=\gamma$ 에서 미분가능하지 않다.

$0 < x < 2$ 일 때, $h(x)=g(2)-g(x)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = g'(2)=0$$

함수 $h(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.

함수 $h(x)$ 는 $x=k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수는 1

$$g(2) = \int_0^2 t(t-2)^2 dt = \frac{4}{3}$$

$$g(\gamma) = \gamma^2 = \frac{4}{3}, \quad \gamma = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

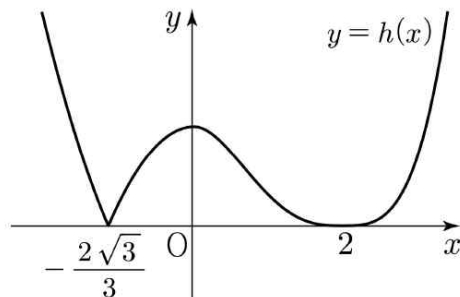
따라서 함수 $h(x)$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하지

않은 실수 k 의 개수가 1이 되도록 하는

$$\text{모든 } a \text{의 값의 곱은 } 2 \times \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

[참고]

함수 $y=h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



2) 2024학년도 9월 모평 29번 - [타원의 작도원리]

29. 한 초점이 $F(c, 0)$ ($c > 0$)인 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 과 중심의 좌표가 $(2, 3)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원이 있다. 타원 위의 점 P 와 원 위의 점 Q 에 대하여 $\overline{PQ} - \overline{PF}$ 의 최솟값이 6일 때, r 의 값을 구하시오. [4점]

[문항해설]

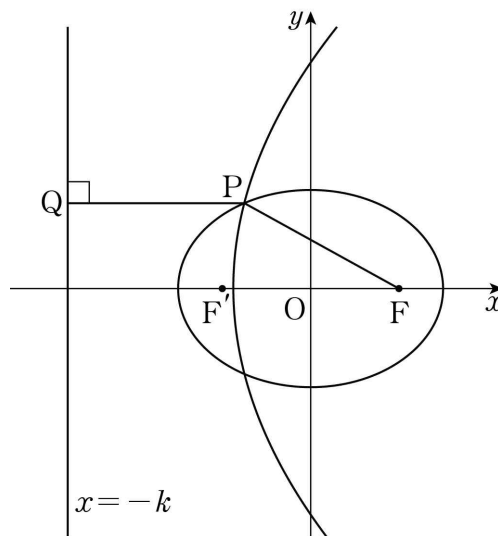
> 타원의 성질을 이용하여 주어진 점들 사이의 관계를 파악한 후, 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는지 묻는 문항이다. 수능특강 24페이지 3번 문항과 유사한 문제다. 타원 위의 점 P 에서 특정 초점 사이까지의 거리가 조건으로 제시된다면, 반드시 P 점에서 다른 초점 사이의 거리도 함께 고려한다. 그럴 경우 관계식이 정리되면서 수식 문제가 아닌, 단순 도형의 최단거리 문제로 전환될 수 있다. 기하 파트 문제일수록 관계식이 직관적이고 간결한 도형으로 대체될 수 있는지 먼저 고민하는 연습이 필요하다.

[유사유형 풀어보기] _ 01

그림과 같이 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)이고 장축의 길이가 12인 타원이 있다. 점 F 가 초점이고 직선 $x = -k$ ($k > 0$)이 준선인 포물선이 타원과 제2사분면의 점 P 에서 만난다. 점 P 에서 직선 $x = -k$ 에 내린 수선의 발을 Q 라 할 때, 두 점 P , Q 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \cos(\angle F'FP) = \frac{7}{8} \\ \text{(나)} \quad & \overline{FP} - \overline{F'Q} = \overline{PQ} - \overline{FF'} \end{aligned}$$

$c + k$ 의 값을 구하시오.



[유사유형 풀어보기] _ 02

28. 두 초점이 F, F'이고 장축의 길이가 $2a$ 인 타원이 있다. 이 타원의 한 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 이 타원의 서로 다른 두 꼭짓점과 한 초점을 지날 때, 상수 a 의 값은?

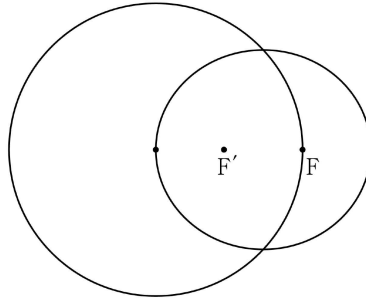
① $\frac{\sqrt{2}}{2}$

② $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$

③ $\sqrt{3}-1$

④ $2\sqrt{2}-2$

⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

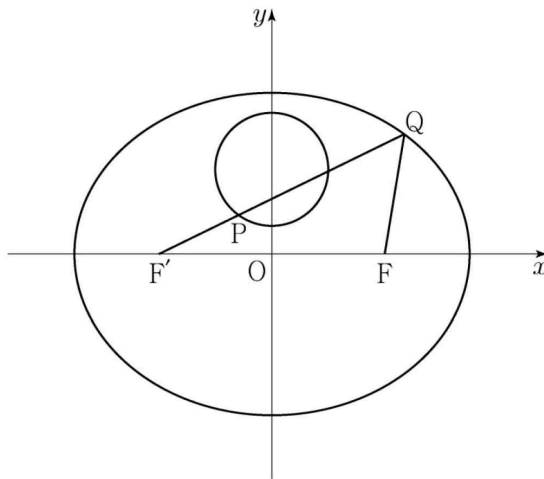


§ 출전 : 교3 2021년 06월 평가원 수학 28번

[유사유형 풀어보기] _ 03

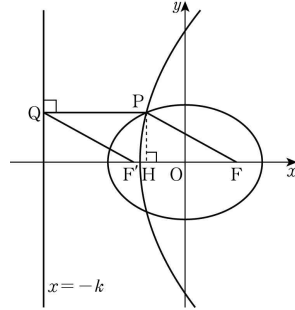
28. 두 초점이 F, F'인 타원 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{33} = 1$ 이 있다.

원 $x^2 + (y-3)^2 = 4$ 위의 점 P에 대하여 직선 F'P가 이 타원과 만나는 점 중 y좌표가 양수인 점을 Q라 하자. $\overline{PQ} + \overline{FQ}$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]



1) [정답] 15

[출제의도] 포물선과 타원의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.



점 F 가 포물선의 초점이므로 포물선의 정의에 의하여 $\overline{FP} = \overline{PQ}$ 이다.

조건 (나)의 $\overline{FP} - \overline{F'Q} = \overline{PQ} - \overline{FF'}$ 에서

$$\overline{F'Q} = \overline{FF'}$$

두 직선 FF' , PQ 가 서로 평행하므로

두 삼각형 PQF , $F'FQ$ 에서

$$\angle PQF = \angle F'FQ$$

두 삼각형 PQF , $F'FQ$ 는 모두 이등변삼각형이므로

$$\angle QFP = \angle PQF = \angle F'FQ = \angle F'QF$$

이고, 선분 FQ 는 공통이므로

두 삼각형 PQF , $F'FQ$ 는 서로 합동이다.

$$\text{즉 } \overline{FP} = \overline{PQ} = \overline{F'Q} = \overline{FF'}$$

장축의 길이가 12 이고 $\overline{FP} = \overline{FF'} = 2c$ 이므로

$$\overline{PF'} = 12 - 2c$$

삼각형 $PF'F$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$(12 - 2c)^2 = (2c)^2 + (2c)^2 - 2 \times (2c)^2 \times \cos(\angle F'FP)$$

$$c^2 - 16c + 48 = 0$$

$$(c - 4)(c - 12) = 0$$

장축의 길이가 12이므로 $c < 6$ 에서 $c = 4$

점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

$\overline{FP} = 8$ 에서

$$\overline{FH} = \overline{FP} \times \cos(\angle F'FP) = 7$$

$\overline{FH} = 7$ 에서 점 H 의 x 좌표는 $4 - 7 = -3$ 이고

$\overline{PQ} = \overline{FP} = 8$ 에서 점 H 의 x 좌표는 $-k + 8$ 이므로

$$-3 = -k + 8, \text{ 즉 } k = 11$$

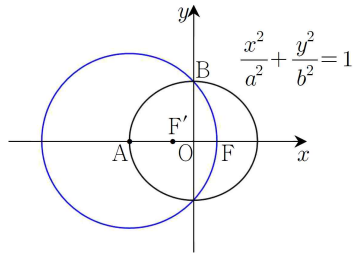
따라서 $c + k = 15$

2) 정답 ③

출제의도 : 타원의 방정식에서 꼭짓점과 초점을 이용하여 장축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

그림과 같이 타원의 중심을 원점으로 하고 장축이 x 축 위에 놓이도록 좌표축을 설정하자.



이때 타원의 장축의 길이가 $2a$ 이므로 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$)라 하면 두 초점의 좌표는

$$F'(-1\sqrt{a^2-b^2}, 0), F(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$$

이다.

주어진 타원이 음의 x 축과 만나는 점을 A, 양의 y 축과 만나는 점을 B라 하면 두 점 A와 B의 좌표는 각각 $A(-a, 0)$, $B(0, b)$ 이다.

점 A를 중심으로 하고 두 점 B와 F를 지나는 원의 반지름의 길이는 1이므로

$$\overline{AB} = 1 \text{에서 } \sqrt{a^2+b^2} = 1$$

$$b^2 = 1 - a^2 \cdots \textcircled{\text{A}}$$

$$\overline{AF} = 1 \text{에서 } \sqrt{a^2-b^2} + a = 1 \cdots \textcircled{\text{B}}$$

$\textcircled{\text{A}}$, $\textcircled{\text{B}}$ 에서

$$\sqrt{a^2-(1-a^2)} = 1-a$$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$2a^2 - 1 = 1 - 2a + a^2$$

$$a^2 + 2a - 2 = 0$$

$$\text{따라서 } a = -1 + \sqrt{3} \quad (a > 0)$$

3) 정답 11

출제의도 : 타원의 정의를 이용하여 두 선분의 길이의 합의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

타원 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{33} = 1$ 의 정의에 의하여

$$\overline{F'P} + \overline{PQ} + \overline{FQ} = 2 \times 7 = 14$$

이므로

$$\overline{PQ} + \overline{FQ} = 14 - \overline{F'P}$$

따라서 $\overline{PQ} + \overline{FQ}$ 가 최대가 되기 위해서는 $\overline{F'P}$ 가 최소가 되어야 한다.

원 $x^2 + (y-3)^2 = 4$ 의 중심을 $O'(0, 3)$ 이라 하면 $F'(-4, 0)$ 이므로

$$\overline{F'P} \geq \overline{F'O'} - 2$$

$$= \sqrt{4^2 + 3^2} - 2$$

$$= 3$$

$$\overline{PQ} + \overline{FQ} = 14 - \overline{F'P} \leq 14 - 3 = 11$$

즉, $\overline{PQ} + \overline{FQ}$ 의 최댓값은 11이다.

3) 2024학년도 9월 모평 30번 - [평면벡터]

30. 좌표평면에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이고 $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형

ABC에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 APQ는 정삼각형이고,

$$9|\overrightarrow{PQ}|\overrightarrow{PQ} = 4|\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AB} \text{ 이다.}$$

(나) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AQ} < 0$

(다) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CB} = 24$

선분 AQ 위의 점 X에 대하여 $|\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}|$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m^2 의 값을 구하시오. [4점]

[문항해설]

> 벡터의 내적을 이용하여 조건을 만족시키는 벡터의 크기의 최솟값을 구할 수 있는지 묻고 있다. 기본개념을 제대로 이해하고 있었다면 도전해볼 만한 문제였다. 좌표평면이라는 조건이 처음부터 제시되어 있었으므로 좌표평면을 이용해서 접근을 시작해 볼 수 있다. (가) 조건을 보고 $9|\overrightarrow{PQ}|$ 와 $4|\overrightarrow{AB}|$ 가 실수이므로 이것을 각각 a, b 라고 놓으면 $a\overrightarrow{PQ} = b\overrightarrow{AB}$ 라는 수식이 성립해 벡터 $\overrightarrow{PQ}$ 와 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 가 평행하다는 것을 알 수 있다. 주어진 각각의 수식이 기하적으로 어떤 조건을 말하는 지 해석하는 연습을 철저히 한다면 마지막 문제까지 모두 맞출 수 있는 실력을 갖추 수 있다.

[유사유형 풀어보기] _ 01

28. 삼각형 ABC와 삼각형 ABC의 내부의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \frac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{PC}|} = 3$$

$$(나) \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = -\frac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}| = -2|\overrightarrow{PC}|^2$$

직선 AP와 선분 BC의 교점을 D라 할 때, $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{PD}$ 이다. 실수 k 의 값은?

- ① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

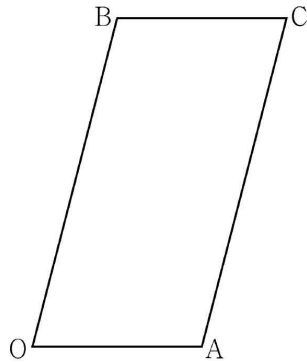
[유사유형 풀어보기] _ 02

29. 좌표평면에서 $\overrightarrow{OA} = \sqrt{2}$, $\overrightarrow{OB} = 2\sqrt{2}$ 이고 $\cos(\angle AOB) = \frac{1}{4}$ 인 평행사변형 OACB에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad (0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1)$$

$$(나) \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC} = 2$$

점 O를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}|$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M , m 이라 하자. $M \times m = a\sqrt{6} + b$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 유리수이다.)



§ 출전 : 고3 2021년 11월 평가원 수능 수학 29번

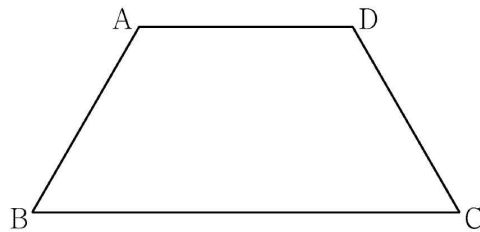
[유사유형 풀어보기] _ 03

29. 평면 α 위에 $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{AD} = 2$, $\angle ABC = \angle BCD = \frac{\pi}{3}$ 인 사다리꼴 ABCD가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ}$ 의 값을 구하시오.

$$(가) \overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BP})$$

$$(나) \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ} = 6$$

$$(다) 2 \times \angle BQA = \angle PBQ < \frac{\pi}{2}$$



§ 출전 : 고3 2022년 11월 평가원 수능 수학 29번

1) [정답] ①

[출제의도] 벡터의 내적을 이용하여 도형에 대한 문제를 해결한다.

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$ 와 $\overrightarrow{PC}$ 가 이루는 각의 크기는 90° 이다.

$$\frac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{PC}|} = 3 \text{에서 } |\overrightarrow{PC}| = t \ (t > 0) \text{이라 하면 } |\overrightarrow{PA}| = 3t$$

두 벡터 $\overrightarrow{PB}$ 와 $\overrightarrow{PC}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = |\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}| \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} |\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}|$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \theta = 135^\circ$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} |\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}| = -2 |\overrightarrow{PC}|^2 \text{에서}$$

$$|\overrightarrow{PB}| = 2\sqrt{2} |\overrightarrow{PC}| \text{이므로 } |\overrightarrow{PB}| = 2\sqrt{2} t$$

$\angle APB = \angle BPC = 135^\circ$, $\angle CPA = 90^\circ$ 이므로 세 삼각형 ABP, BCP, CAP의 넓이를 각각 S_1 , S_2 , S_3 이라 하면

$$S_1 : S_2 : S_3 = 3t^2 : t^2 : \frac{3}{2}t^2 = 6 : 2 : 3$$

직선 AP와 변 BC의 교점이 D 이므로 $\overline{AD} : \overline{DP} = (S_1 + S_2 + S_3) : S_2 = 11 : 2$

따라서 $\overrightarrow{AD} = \frac{11}{2} \overrightarrow{PD}$ 이므로 $k = \frac{11}{2}$

2) 정답 100

출제의도 : 평면벡터의 연산과 내적을 이용하여 조건을 만족시키는 벡터의 크기의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 의하여 점 P는 평행사변형 OACB의 둘레 또는 내부에 있는 점이다.

조건 (나)에서

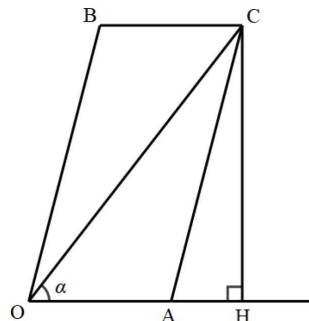
$$\begin{aligned} & \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) - |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos(\angle AOB) \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} - \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{4} \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} - 1 = 2 \end{aligned}$$

이므로

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = 3$$

(i) 벡터 $3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}$ 의 크기는 $\overrightarrow{OP}$ 의 크기가 최대이고 $\overrightarrow{OX}$ 가 $\overrightarrow{OP}$ 와 반대 방향일 때 최대가 되고, $\overrightarrow{OP}$ 의 크기는 점 P가 선분 OA 위에 있을 때 최대가 된다.

다음 그림과 같이 점 C에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\angle COA = \alpha$ 라 하자.



$\angle CAH = \angle AOB$ 에서

$$\cos(\angle CAH) = \cos(\angle AOB) = \frac{1}{4}$$

이므로

$$\begin{aligned}\overline{AH} &= \overline{AC} \times \cos(\angle CAH) \\ &= \overline{OB} \times \frac{1}{4} \\ &= 2\sqrt{2} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OC}|^2 &= |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{4} \\ &= 2 + 8 + 2 = 12\end{aligned}$$

이므로

$$|\overrightarrow{OC}| = 2\sqrt{3}$$

그러므로

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

즉, 점 P가 선분 OA 위에 있을 때

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} &= |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OC}| \cos\alpha \\ &= |\overrightarrow{OP}| \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} |\overrightarrow{OP}| = 3\end{aligned}$$

이므로

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{2}$$

이때 $\overrightarrow{OX}$ 가 $\overrightarrow{OP}$ 와 반대 방향이면

$$|3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}| = 3|\overrightarrow{OP}| + |\overrightarrow{OX}|$$

이므로

$$M = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

- (ii) 벡터 $3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}$ 의 크기는 $\overrightarrow{OP}$ 의 크기가 최소이고 $\overrightarrow{OX}$ 가 $\overrightarrow{OP}$ 와 같은 방향일 때 최소가 되고, $\overrightarrow{OP}$ 의 크기는 점 P가 선분 OC 위에 있을 때 최소가 된다.

이때

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} &= |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OC}| \\ &= |\overrightarrow{OP}| \times 2\sqrt{3} = 3\end{aligned}$$

이므로

$$|\overrightarrow{OP}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $\overrightarrow{OX}$ 가 $\overrightarrow{OP}$ 와 같은 방향이면

$$|3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}| = 3|\overrightarrow{OP}| - |\overrightarrow{OX}|$$

이므로

$$m = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}$$

(i), (ii)에 의하여

$$\begin{aligned}M \times m &= 4\sqrt{2} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} \right) \\ &= 6\sqrt{6} - 8\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= 6^2 + (-8)^2 \\ &= 100\end{aligned}$$

3) 정답 12

출제의도 : 벡터의 연산과 벡터의 내적을 이용하여 조건을 만족시키는 점의 위치를 찾고, 벡터의 내적을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\text{조건 (가)에서} \\ 2\overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

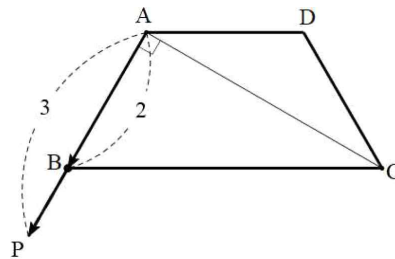
이므로

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

따라서 점 P는 선분 BA를 1 : 3으로 외분하는 점이고,

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = 3$$

이다.



한편, $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 4$, $\angle CBA = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$, $\overline{AC} = 2\sqrt{3}$ 이다.

따라서 점 P에서 직선 AC에 내린 수선의 발이 A이다.

점 Q에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 조건 (나)에 의하여

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = 6$$

이어야 하므로 점 H는 선분 AC 위에 있고

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AH}| = 2\sqrt{3} \times \overline{AH} = 6$$

즉,

$$\overline{AH} = \sqrt{3}$$

이다.

따라서 점 H는 선분 AC의 중점이므로 점 Q는 선분 AC의 수직이등분선인 직선 DH 위에 있다.

이때 삼각형 ABQ에서

$$\angle PBQ = \angle BAQ + \angle BQA$$

이므로

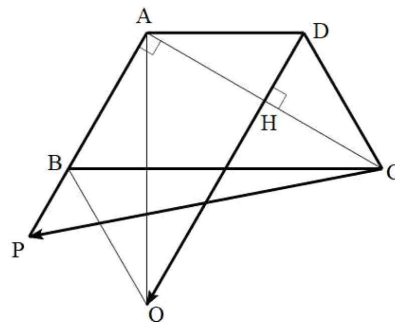
$$2 \times \angle BQA = \angle PBQ$$

를 만족시키려면

$$\angle BAQ = \angle BQA,$$

즉, $\overline{AB} = \overline{BQ}$ 이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 점 Q는 다음 그림과 같이 점 A를 지나고 직선 BC에 수직인 직선이 직선 DH와 만나는 점이어야 한다.



이때 직각삼각형 AQD에서

$$\overline{AD}=2, \overline{AQ}=2\sqrt{3}$$

이므로

$$\overline{DQ}=\sqrt{4+12}=4$$

따라서

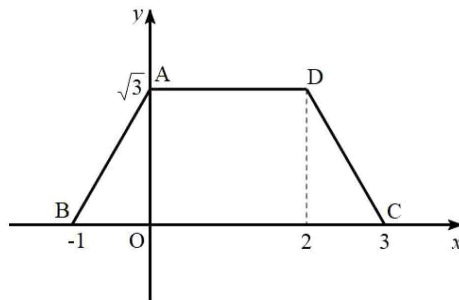
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ} &= (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}) \cdot \overrightarrow{DQ} \\ &= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DQ} \\ &= |\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{DQ}| \cos \frac{\pi}{2} + |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{DQ}| \cos 0 \\ &= 0 + 3 \times 4 \times 1 \\ &= 12\end{aligned}$$

[다른 풀이]

다음 그림과 같이 네 점 A, B, C, D의 좌표가 각각

$$A(0, \sqrt{3}), B(-1, 0), C(3, 0), D(2, \sqrt{3})$$

이 되도록 좌표평면을 설정하자.



점 P의 좌표를 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BP})$$

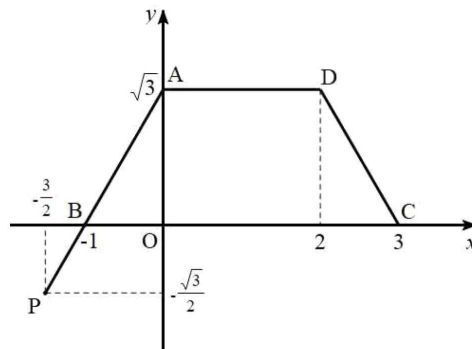
에서

$$(3, -\sqrt{3}) = 2\{(2, 0) + (a+1, b)\}$$

$$3 = 2(a+3) \text{에서 } a = -\frac{3}{2}$$

$$-\sqrt{3} = 2b \text{에서 } b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

즉, $P(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 이므로 다음 그림과 같이 세 점 A, B, P는 한 직선 위에 있고 $\overline{BP}=1$ 이다.



또, 점 Q의 좌표를 $Q(x, y)$ 라 하면

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ} = 6$$

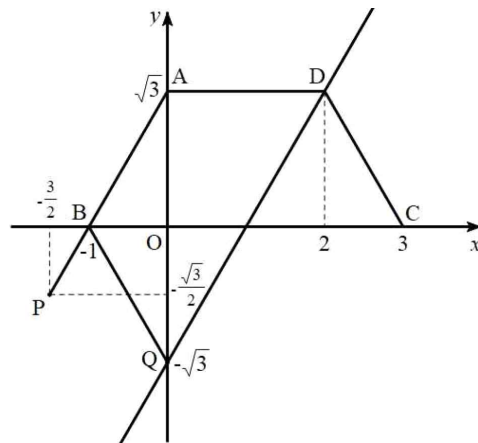
에서

$$(3, -\sqrt{3}) \cdot \left(x + \frac{3}{2}, y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6$$

$$3x + \frac{9}{2} - \sqrt{3}y - \frac{3}{2} = 6$$

$$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$$

이므로 점 Q는 직선 $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ 위에 있다.



이때 삼각형 ABQ에서

$$\angle PBQ = \angle BAQ + \angle BQA$$

이므로

$$2 \times \angle BQA = \angle PBQ$$

를 만족시키려면

$$\angle BAQ = \angle BQA,$$

즉 $\overline{AB} = \overline{BQ}$ 이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 점 Q의 좌표는 $Q(0, -\sqrt{3})$ 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ} &= \left(-\frac{9}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (-2, -2\sqrt{3}) \\ &= 9 + 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$